

工学系数学試験 12

次の 番号 に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい。なお、定数 a は正の実数を表わす。

(1)(10点) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 2x + 1}{(x-1)^2} = \boxed{1}$ である。

- (選択肢) ① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 2 ⑥ -2 ⑦ 3 ⑧ -3 ⑨ その他の値

(2)(10点) 関数 $y = \sin^{-1} \sqrt{x}$ の導関数は $y' = \boxed{2}$ となる。

- (選択肢) ① $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ ② $\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{2x(1-x)}}$ ④ $\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$
 ⑤ $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ⑥ $\sqrt{\frac{x}{2(1-x)}}$ ⑦ その他の関数

(3)(10点) $x = t^2 + \cos t$, $y = 1 - \sin t$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表わすと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \quad \text{となる。}$$

- (選択肢) ① $2t - \sin t$ ② $2t + \cos t$ ③ $2t + \sin t$ ④ $2t - \cos t$
 ⑤ $\sin t$ ⑥ $\cos t$ ⑦ $-\sin t$ ⑧ $-\cos t$ ⑨ その他の関数

(4)(15点) 次の積分を計算すると $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = \boxed{5}$, $\int_0^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \boxed{6}$ となる。

- (選択肢) ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{6a}$ ⑤ $\frac{\pi}{3a}$ ⑥ $\frac{\pi}{2a}$ ⑦ $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ ⑧ $\sqrt{2a}$
 ⑨ その他の値

(5)(20点) 2重積分 $\iint_D (x+y) dx dy$, $D = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq 1\}$, を求める. この2重積分を累次積分に書き換えると **7** となり, その値は **8** である.

- (選択肢) ① $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (x+y) dy \right) dx$ ② $\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (x+y) dy \right) dx$
 ③ $\int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{y}} (x+y) dx \right) dy$ ④ $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x+y) dx \right) dy$
 ⑤ $\frac{2}{5}$ ⑥ $\frac{4}{5}$ ⑦ 1 ⑧ $\frac{6}{5}$ ⑨ これ以外の値

(6)(20点) 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値として4と **9** があり, 固有値4の固有ベクトルとして **10** がある.

- (選択肢) ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ これ以外の値

- ⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑦ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ⑨ これ以外のベクトル

(7)(15点) 連立方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - y - 2z = -3 \\ 3x + 2y - 4z = 10 \end{cases} \quad \text{の係数行列は} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

であり, その行列式の値は $|A| = \mathbf{11}$ となる. クラメル公式から y を求めると

$$y = \frac{\mathbf{12}}{|A|} = \mathbf{13} \quad \text{となる.}$$

- (選択肢) ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 11 ⑤ その他の値

- ⑥ $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 10 & -4 \end{vmatrix}$ ⑦ $\begin{vmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -10 & -4 \end{vmatrix}$ ⑧ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ ⑨ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & -10 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$