工学基礎・数学ミニマム　テスト 3

次の空欄 ($\boxed{\text{番号}}$) に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\boxed{\mathbf{1}}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\boxed{\mathbf{2}}$ (ただし, a は正の定数とする)

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② ∞ ③ $-\infty$ ④ e ⑤ $\dfrac{1}{e}$ ⑥ a ⑦ $\log a$
⑧ $\dfrac{1}{a}$ ⑨ $\dfrac{1}{\log a}$

(2) $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3$ のグラフは $\boxed{\mathbf{3}}$. このグラフが x 軸と交わる点は $\boxed{\mathbf{4}}$ 個あり, この関数が極大となる点は $\boxed{\mathbf{5}}$ 個, 変曲点は $\boxed{\mathbf{6}}$ 個ある.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 原点対称である
⑦ y 軸対称である ⑧ x 軸対称である ⑨ 対称性はない

(3) x が 0 に近いとき, $\sin x$ の 1 次近似式は $\boxed{\mathbf{7}}$, $\cos x$ の 2 次近似式は $\boxed{\mathbf{8}}$ であることを使うと, $\sin x(1-\cos x)$ の 3 次近似式は $\boxed{\mathbf{9}}$ となる.

(選択肢) ⓪ x ① $1+x$ ② $-x$ ③ $1-x^2$ ④ $1+\dfrac{1}{2}x^2$ ⑤ $1-\dfrac{1}{2}x^2$
⑥ $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x^3$ ⑦ $-x^3$ ⑧ $-\dfrac{1}{2}x^3$ ⑨ $\dfrac{1}{2}x^3$

(4) r の 1 変数関数 $z=z(r)$ において, r が x と y の関数 $r=r(x,y)$ であるとき, z は x と y の 2 変数関数 $z=z(r(x,y))$ となる. このとき, 合成関数の微分法により $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\mathbf{10}}$ である. 特に $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\mathbf{11}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}$ ① $\dfrac{dz}{dr}\dfrac{dr}{dx}$ ② $\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{dr}{dx}$ ③ $\dfrac{dz}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x}$ ④ $\dfrac{dz}{dr}\dfrac{1}{2r}$ ⑤ $\dfrac{dz}{dr}\dfrac{2x}{r}$
⑥ $\dfrac{dz}{dr}\dfrac{x}{r}$ ⑦ $\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{x}{r}$ ⑧ $\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{2x}{r}$ ⑨ $\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{1}{2r}$

(5) $I=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$ を計算する. $\sqrt{x}=t$ とおくと, $I=\displaystyle\int \boxed{\mathbf{12}}\,dt$ であるから, $I=\boxed{\mathbf{13}}+C$ (C は積分定数) となる.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{1}{t(1+t)}$ ① $\dfrac{2}{t(1+t)}$ ② $\dfrac{2}{1+t}$ ③ $\dfrac{2t}{1+t}$ ④ $\dfrac{1}{1+t}$
⑤ $\log(1+\sqrt{x})$ ⑥ $\log\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ ⑦ $2\log\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ ⑧ $2\log(1+\sqrt{x})$
⑨ $2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x})$

(6) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は定義より $\boxed{\mathbf{14}}$ の意味であるから, 極限を計算すると $\boxed{\mathbf{15}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 \log x dx$ ① $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \log x dx$ ② $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_{\varepsilon}^1 \log x dx$
③ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_0^{\varepsilon} \log x dx$ ④ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to-0}\int_{\varepsilon}^1 \log x dx$ ⑤ -5 ⑥ -4 ⑦ -3 ⑧ -2
⑨ -1

(7) 二重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ ($D=\{1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$) を計算する. 直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を行うと, ヤコビアンは $\boxed{\mathbf{16}}$ となるので, この二重積分を累次積分に書き換えると $\boxed{\mathbf{17}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $r^2\sin\theta$ ① 1 ② r ③ $r\sin\theta$ ④ $\displaystyle\int_1^4\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}d\theta\right)dr$
⑤ $\displaystyle\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}d\theta\right)dr$ ⑥ $\displaystyle\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}d\theta\right)dr$ ⑦ $\displaystyle\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\right)dr$
⑧ $\displaystyle\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}d\theta\right)dr$ ⑨ $\displaystyle\int_1^4\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}d\theta\right)dr$

(8) $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とするとき, $|z|=\boxed{\mathbf{18}}$ である. また, $\dfrac{1}{z}=\boxed{\mathbf{19}}$ となり, これを極形式で表すと $\boxed{\mathbf{20}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{1}{2}$ ① 1 ② 2 ③ $2+\sqrt{3}i$ ④ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1-\sqrt{3}i$
⑥ $\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$ ⑦ $2\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$ ⑧ $\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi$
⑨ $2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

(9) 2 行 3 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ と 3 行 2 列の行列 $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，それらの積 AB は 2 行 $\boxed{\mathbf{21}}$ 列の行列となり，その $(2,1)$ 成分は $\boxed{\mathbf{22}}$ である．

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ −1　⑨ −2

(10) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，行列式 $|\,A\,|$ の値は $\boxed{\mathbf{23}}$ であり，逆行列 A^{-1} の $(1,2)$ 成分は $\dfrac{\boxed{\mathbf{24}}}{\boxed{\mathbf{25}}}$ となる．

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ −1　⑦ −2　⑧ −3　⑨ −4

(11) 行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき，固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解くと，A の固有値は -2 と $\boxed{\mathbf{26}}$ であり，-2 に対する固有ベクトルは $\boxed{\mathbf{27}}$ の定数倍で表される．

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ −1　④ −2

⑤ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　⑦ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　⑨ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$