工学基礎・数学ミニマム　テスト 4

次の空欄 ($\boxed{\text{番号}}$) に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x+1}{x^3+4x^2-2}=\boxed{\mathbf{1}}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\boxed{\mathbf{2}}$

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ ∞
⑨ $-\infty$

(2) x の関数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ の極値をとる点は $\boxed{\mathbf{3}}$ 個あり, 変曲点は $\boxed{\mathbf{4}}$ 個ある. 変曲点のうち $x>0$ をみたす点の座標は $\boxed{\mathbf{5}}$ である.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ ⑥ $\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$
⑦ $\left(2,\dfrac{2}{5}\right)$ ⑧ $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ⑨ $\left(3,\dfrac{3}{10}\right)$

(3) 関数 $\dfrac{x}{e^x}$ のマクローリン展開を考えると, x の係数は $\boxed{\mathbf{6}}$, x^2 の係数は $\boxed{\mathbf{7}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -2 ⑥ -3 ⑦ $\dfrac{1}{2}$ ⑧ $-\dfrac{1}{2}$
⑨ $-\dfrac{1}{6}$

(4) 2 変数関数 $f(x,y)=\log(e^x+y^2)$ に対して f_x, f_y, f_{xy} を求めると, $f_x=\boxed{\mathbf{8}}$, $f_y=\boxed{\mathbf{9}}$, $f_{xy}=\boxed{\mathbf{10}}$ である. ただし, 対数は自然対数とする.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{1}{e^x+y^2}$ ① $\dfrac{y^2}{e^x+y^2}$ ② $\dfrac{y}{e^x+y^2}$ ③ $\dfrac{e^x}{e^x+y^2}$ ④ $\dfrac{2y}{e^x+y^2}$
⑤ $\dfrac{-2y}{e^x+y^2}$ ⑥ $\dfrac{-2ye^x}{(e^x+y^2)^2}$ ⑦ $\dfrac{y^2e^x}{(e^x+y^2)^2}$ ⑧ $\dfrac{e^x}{(e^x+y^2)^2}$ ⑨ $\dfrac{e^x+2y}{(e^x+y^2)^2}$

(5) $\dfrac{1}{1+x^2}$ の原始関数は $\boxed{\mathbf{11}}$ であるから, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \boxed{\mathbf{12}}$ となる (ただし, 下の選択肢において対数は自然対数とする).

(選択肢) ⓪ $\log(1+x^2)$ ① $\dfrac{1}{2x}\log(1+x^2)$ ② $\arcsin x$ ③ $\arctan x$
④ $\arccos x$ ⑤ $\log 2$ ⑥ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\right)\log 2$ ⑦ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑧ $\dfrac{\pi}{6}$ ⑨ $\dfrac{\pi}{12}$

(6) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ は定義より $\boxed{\mathbf{13}}$ の意味であるから, 極限を計算すると $\boxed{\mathbf{14}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_\varepsilon^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
⑥ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ⑦ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ⑧ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_0^{\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
⑨ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ $(D = \{y^2 \leqq x, x-2 \leqq y\})$ を計算する. この二重積分を累次積分に書き換えると $\boxed{\mathbf{15}}$ となるので, この二重積分の値は $\boxed{\mathbf{16}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{y^2}^{y+2} xdx\right)dy$ ① $\displaystyle\int_0^4\left(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xdy\right)dx$
② $\displaystyle\int_{-1}^2\left(\int_{y^2}^{y+2} xdx\right)dy$ ③ $\displaystyle\int_1^4\left(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xdy\right)dx$ ④ $\dfrac{31}{3}$ ⑤ $\dfrac{35}{3}$ ⑥ $\dfrac{32}{5}$
⑦ $\dfrac{36}{5}$ ⑧ $\dfrac{33}{7}$ ⑨ $\dfrac{37}{7}$

(8) $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき, $|z| = \boxed{\mathbf{17}}$ であり, $\arg z = \boxed{\mathbf{18}}$ である. 従って, z^{10} を計算すると $\boxed{\mathbf{19}}$ となる. ただし, $|z|$ は z の絶対値, $\arg z$ は z の偏角とする.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② i ③ $1+i$ ④ $\dfrac{\pi}{3}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑥ $\dfrac{\pi}{6}$ ⑦ $\dfrac{1}{32}$
⑧ $\dfrac{i}{32}$ ⑨ $\dfrac{1+i}{32}$

(9) 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ について，$AB = BA$ が成り立つような x, y を求めると，$x = \boxed{\mathbf{20}}$, $y = \boxed{\mathbf{21}}$ である.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$ ⑥ $\frac{5}{2}$ ⑦ $-\frac{5}{2}$ ⑧ $\frac{7}{2}$ ⑨ $-\frac{7}{2}$

(10) 連立方程式 $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 5 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ について, この連立方程式の係数行列を $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ とすると，行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{22}}$ である．クラメルの公式を用いて x を表すと $x = \boxed{\mathbf{23}}$ であるので, これを計算すると $x = \boxed{\mathbf{24}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3 ⑥ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ⑦ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ⑧ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ ⑨ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

(11) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解くと, $\lambda = \boxed{\mathbf{25}}, \boxed{\mathbf{26}}$ (3 重解) となる.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ -1 ⑦ -2 ⑧ -3 ⑨ -4