工学基礎・数学ミニマム　テスト 5

次の空欄 ($\boxed{\text{番号}}$) に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい.

(1) $e^{\frac{1}{3}\log 8} = \boxed{\mathbf{1}}$, $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \boxed{\mathbf{2}}$. ただし, 対数は自然対数とする.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -2 ⑥ -3 ⑦ e ⑧ $+\infty$ ⑨ $-\infty$

(2) x の関数 $y = \arcsin x$ を微分すると $y' = \boxed{\mathbf{3}}$ である. x と y の関数 $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y^2}$ を偏微分すると, $z_x = \boxed{\mathbf{4}}$, $z_y = \boxed{\mathbf{5}}$ である.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ① $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ② $\dfrac{1}{1+x^2}$ ③ $\dfrac{-2x}{\sqrt{y^4-x^4}}$ ④ $\dfrac{2x}{\sqrt{y^4-x^4}}$ ⑤ $\dfrac{2xy^2}{y^4+x^4}$ ⑥ $\dfrac{2x^2}{y\sqrt{y^4-x^4}}$ ⑦ $\dfrac{-2x^2}{y\sqrt{y^4-x^4}}$ ⑧ $\dfrac{-2x^2y^2}{y^4+x^4}$

(3) 高さが x, 底面の半径が y の円柱の体積を $z = f(x,y)$ とし, 2 変数関数 $z = f(x,y)$ の点 $(2,1,2\pi)$ での 1 次化 (接平面) を考える. $y = 1$ としたときの x の関数 $z = f(x,1)$ の $x = 2$ の近くでの 1 次近似は $\boxed{\mathbf{6}}$, $x = 2$ としたときの y の関数 $z = f(2,y)$ の $y = 1$ の近くでの 1 次近似は $\boxed{\mathbf{7}}$ である. 従って, 2 変数関数 $z = f(x,y)$ の点 $(2,1,2\pi)$ での 1 次化 (接平面) はこれらの 2 直線で張られるので, $\boxed{\mathbf{8}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $z - 2\pi = \pi(x-2)$ ① $z - 2\pi = 2\pi(x-2)$ ② $z + 2\pi = \pi(x-2)$
③ $z - 2\pi = 2\pi(y-1)$ ④ $z - 2\pi = 4\pi(y-1)$
⑤ $z - 2\pi = \pi(x-2) + 2\pi(y-1)$ ⑥ $z - 2\pi = \pi(x-2) + 4\pi(y-1)$
⑦ $z - 2\pi = 2\pi(x-2) + 2\pi(y-1)$ ⑧ $z - 2\pi = 2\pi(x-2) + 4\pi(y-1)$
⑨ $z + 2\pi = \pi(x-2) + 4\pi(y-1)$

(4) $\sinh x$ の定義式は $\boxed{\mathbf{9}}$ であり, $\cosh x$ の定義式は $\boxed{\mathbf{10}}$ であるので,
$\displaystyle\int_0^1 \sinh x \cdot \cosh 2x dx = \boxed{\mathbf{11}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ① $\dfrac{e^x + e^{-x}}{-2}$ ② $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ③ $\dfrac{e^x - e^{-x}}{-2}$
④ $\dfrac{\cosh 3 + 3\cosh 1 - 4}{6}$ ⑤ $\dfrac{\cosh 3 + 3\cosh 1 - 4}{-6}$ ⑥ $\dfrac{\cosh 3 + 3\cosh 1 + 2}{6}$
⑦ $\dfrac{\cosh 3 + 3\cosh 1 + 2}{-6}$ ⑧ $\dfrac{\cosh 3 - 3\cosh 1 + 2}{6}$ ⑨ $\dfrac{\cosh 3 - 3\cosh 1 + 2}{-6}$

(5) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x dx$ を部分積分を使って計算すると $\boxed{\mathbf{12}}$ となる (ただし, 下の選択肢において対数は自然対数とする).

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② $\log\left|\dfrac{\sin\sqrt{3}}{\sin 1}\right|$ ③ $\log\left|\dfrac{\tan\sqrt{3}}{\tan 1}\right|$ ④ $\dfrac{1}{\sin^2 1} - \dfrac{1}{\sin^2\sqrt{3}}$
⑤ $\dfrac{1}{\tan^2 1} - \dfrac{1}{\tan^2\sqrt{3}}$ ⑥ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{4}\right)\pi + \dfrac{1}{2}\log 2$ ⑦ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{4}\right)\pi - \dfrac{1}{2}\log 2$
⑧ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{4}\right)\pi - \dfrac{1}{2}\log 2$ ⑨ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{4}\right)\pi + \dfrac{1}{2}\log 2$

(6) 二重積分 $\displaystyle\iint_D (x+2y)dxdy$ $(D = \{2x + y \leqq 2, x \geqq 0, y \geqq 0\})$ を計算する. この二重積分を累次積分に書き換えると $\boxed{\mathbf{13}}$ となるので, この二重積分の値は $\boxed{\mathbf{14}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} (x+2y)dx\right)dy$ ① $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{2-2x} (x+2y)dy\right)dx$
② $\displaystyle\int_0^2\left(\int_0^{1-y} (x+2y)dx\right)dy$ ③ $\displaystyle\int_0^2\left(\int_0^{2-2x} (x+2y)dy\right)dx$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$
⑥ $\dfrac{4}{3}$ ⑦ $\dfrac{5}{3}$ ⑧ $\dfrac{7}{3}$ ⑨ $\dfrac{8}{3}$

(7) $z = (1 + \sqrt{3}i)^5$ とするとき, $|z| = \boxed{\mathbf{15}}$ であり, z を極形式で表すと, $\boxed{\mathbf{15}}\times\boxed{\mathbf{16}}$ となる. ただし, $|z|$ は z の絶対値とする.

(選択肢) ⓪ 1 ① 4 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ $\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$
⑥ $\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$ ⑦ $\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ ⑧ $\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$
⑨ $\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}$

(8) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ 対して，積 AB の $(1,2)$ 成分は $\boxed{\textbf{17}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ -1 ⑦ -2 ⑧ -3 ⑨ -4

(9) 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \alpha \\ \beta & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ に対して，${}^tA = A^{-1}$ が成り立っているとする. このとき, $\alpha = \boxed{\textbf{18}}$, $\beta = \boxed{\textbf{19}}$ である. また, $|A| = \boxed{\textbf{20}}$ である. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列, A^{-1} は A の逆行列とする.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② -1 ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$ ⑥ $-\dfrac{2}{3}$ ⑦ $\dfrac{4}{3}$ ⑧ $-\dfrac{4}{3}$ ⑨ $\dfrac{5}{3}$

(10) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する. I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解くと, A の固有値は -1 と $\boxed{\textbf{21}}$ であり，-1 に対する固有ベクトルは $\boxed{\textbf{22}}$ の定数倍で表される.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑦ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$