工学基礎・数学ミニマム　テスト 7

次の空欄 ($\boxed{\text{番号}}$) に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい.

(1)　$e^{i\pi} = \boxed{\mathbf{1}}$,　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(a+x)-\log a}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$.　　ただし, $a>0$, 対数は自然対数とする.

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ -3　⑦ e　⑧ a　⑨ $\dfrac{1}{a}$

(2)　半径の長さが 1, 中心角の大きさが θ ラジアンの扇形によって作られる円錐の容積を考える. この扇形の弧の部分の長さは $\boxed{\mathbf{3}}$ であるので, この円錐の容積を最大にする θ は $\boxed{\mathbf{4}}$ である.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{\theta}{\pi}$　① θ　② $\pi\theta$　③ $2\pi\theta$　④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\pi$　⑥ π　⑦ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$　⑧ $\dfrac{4}{3}\pi$　⑨ 2π

(3)　$\sin x$ と e^x のマクローリン展開を利用して, $\dfrac{\sin x}{e^x}$ のマクローリン展開を求めると, x^2 の係数は $\boxed{\mathbf{5}}$, x^3 の係数は $\boxed{\mathbf{6}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ -1　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $-\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{2}$　⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑨ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4)　2 変数関数 $f(x,y)=x^y$ に対して f_{xy}, f_{yy} を求めると, $f_{xy} = \boxed{\mathbf{7}}$, $f_{yy} = \boxed{\mathbf{8}}$ である. (ただし, 下の選択肢において対数は自然対数とする.)

(選択肢) ⓪ x^y　① y^x　② yx^{y-1}　③ $y(y-1)x^{y-2}$　④ $(y\log x+1)x^y$　⑤ $(y\log x+1)x^{y-1}$　⑥ $x^y\log x$　⑦ $yx^{y-1}\log x$　⑧ $x^y(\log x)^2$　⑨ $x^{y-1}(\log x)^2$

(5) 曲面 $z = x^2 + xy + y^2$ 上の点 $(-1, 1, 1)$ において, z が最も増加する方向 (曲面の傾斜が最大の方向) を向いた平面ベクトル (勾配ベクトル) は $\boxed{\mathbf{9}}$, その方向への方向微分は $\boxed{\mathbf{10}}$ である.

(選択肢) ⓪ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ① $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ④ $-\sqrt{2}$
⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ⑥ $\sqrt{2}$ ⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ⑧ $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ⑨ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(6) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ の原始関数は $\boxed{\mathbf{11}}$ であるから, $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \boxed{\mathbf{12}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\arccos(x^2)$ ① $\arctan(x^2)$ ② $\arcsin(x^2)$ ③ $-\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{4x^3}$
④ $-\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{8x^3}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{6}$ ⑥ $\dfrac{\pi}{3}$ ⑦ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑧ $-\dfrac{\pi}{6}$ ⑨ $-\dfrac{\pi}{3}$

(7) 二重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ $(D = \{x^2 + y^2 \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\})$ を計算する. 直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行い, この二重積分を累次積分に書き換えると $\boxed{\mathbf{13}}$ となり, この二重積分の値は $\boxed{\mathbf{14}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ④ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$
⑥ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr\right)d\theta$ ⑦ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr\right)d\theta$
⑧ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1 r^2\cos\theta dr\right)d\theta$ ⑨ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^2\cos\theta dr\right)d\theta$

(8) $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}i$ の極形式をオイラーの公式を用いて表わすと $\boxed{\mathbf{15}}$ であり, また, z の平方根の 1 つは $\boxed{\mathbf{16}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ① $\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ② $\dfrac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ③ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{i\pi}$ ④ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{i\frac{7\pi}{6}}$
⑤ $\dfrac{2}{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ⑥ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ⑦ $\dfrac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ⑧ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{i\frac{11\pi}{6}}$ ⑨ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(9) 連立方程式 $\begin{cases} ax + 6y + 3z = 0 \\ 2x + ay + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ について, この連立方程式の係数行列を $A = \begin{bmatrix} a & 6 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，行列式 $|\,A\,|$ の値は $\boxed{\mathbf{17}}$ である．また，この連立方程式が解をもたない条件は, $a = \boxed{\mathbf{18}}$ となる．

(選択肢）⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $a(a-1)$　⑤ $a(a-2)$
⑥ $a(a-3)$　⑦ $(a-1)(a-2)$　⑧ $(a-1)(a-3)$　⑨ $(a-2)(a-3)$

(10) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ に対して，逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分は $\boxed{\mathbf{19}}$, $(1,2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ となる．

(選択肢）⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ -1　⑥ -2　⑦ -3　⑧ -4
⑨ -5

(11) 行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解くと, A の固有値は 6 と $\boxed{\mathbf{21}}$ であり，6 に対する固有ベクトルは $\boxed{\mathbf{22}}$ の定数倍で表される．

(選択肢）⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　⑦ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$　⑨ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$