工学基礎・数学ミニマム　テスト 8

次の空欄 ($\boxed{\text{番号}}$) に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \boxed{\mathbf{1}}$,　　$\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x = \boxed{\mathbf{2}}$.

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ -3　⑦ e　⑧ $\dfrac{1}{e}$
⑨ $+\infty$

(2) 関数 $y = e^x \sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ は, $x = \boxed{\mathbf{3}}$ で極大値をとり, 変曲点のうち x 座標が最大である変曲点の x 座標は $\boxed{\mathbf{4}}$ である.

(選択肢) ⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{4}$　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ $\dfrac{3\pi}{4}$　④ π　⑤ $\dfrac{5\pi}{4}$　⑥ $\dfrac{3\pi}{2}$　⑦ $\dfrac{7\pi}{4}$
⑧ $\dfrac{7\pi}{8}$　⑨ 2π

(3) $\sin^2 x$ のマクローリン展開を求めると, x^2 の係数は $\boxed{\mathbf{5}}$, x^4 の係数は $\boxed{\mathbf{6}}$ となる.

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ -1　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $-\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{2}$　⑦ $-\dfrac{1}{2}$
⑧ $\dfrac{2}{3}$　⑨ $-\dfrac{2}{3}$

(4) パラメータ表示された関数 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると, $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\mathbf{7}}$ であり, この関数のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積は $\boxed{\mathbf{8}}$ である (このグラフはサイクロイドとよばれ, 半径 1 の円盤の円周上のある 1 点を決め, その円盤を滑らずに転がしたときのその点の軌跡を表すグラフである).

(選択肢) ⓪ $\dfrac{1-\cos t}{t-\sin t}$　① $\dfrac{t-\sin t}{1-\cos t}$　② $\sin t$　③ $\dfrac{1-\cos t}{\sin t}$　④ $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

⑤ π　⑥ 2π　⑦ 3π　⑧ 4π　⑨ 5π

(5)　2変数関数 $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ に対して z_x を求めると, $z_x = \boxed{\mathbf{9}}$ である. また, 点 $(1,1,2)$ における1次化 (接平面) は $\boxed{\mathbf{10}}$ である.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{x^2}{2y} + y\log x$　① $x\log y + \dfrac{y^2}{2x}$　② $\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$　③ $-\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{x}$
④ $z-2=(x-1)+(y-1)$　⑤ $z-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$　⑥ $z-2=\dfrac{1}{2}(x-1)+(y-1)$
⑦ $z-2=y-1$　⑧ $z-2=0$　⑨ $z-2=\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)$

(6)　2変数関数 $z = x^3 + y^2$ に $x = 5u+4v$, $y = 7u+6v$ を代入して得られる合成関数 $z = z(u,v)$ について $z_u(1,-1)$, $z_v(1,-1)$ を求めると, $z_u(1,-1) = \boxed{\mathbf{11}}$, $z_v(1,-1) = \boxed{\mathbf{12}}$ である.

(選択肢) ⓪ 20　① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25　⑥ 26　⑦ 27
⑧ 28　⑨ 29

(7)　二重積分 $\displaystyle\iint_D (1-x^2)dxdy$ $(D = \{1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\})$ を計算する. 直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行い, この二重積分を累次積分に書き換えると $\boxed{\mathbf{13}}$ となり, この二重積分の値は $\boxed{\mathbf{14}}$ となる.

(選択肢) ⓪ -240π　① -15π　② $-\dfrac{\pi}{3}$　③ $-\dfrac{3\pi}{4}$　④ $\dfrac{3\pi}{4}$　⑤ $\dfrac{\pi}{3}$
⑥ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_1^4 (1-r^2\cos^2\theta)rdr\right)d\theta$　⑦ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 (1-r^2\cos^2\theta)rdr\right)d\theta$
⑧ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_1^4 (1-r^2\cos^2\theta)dr\right)d\theta$　⑨ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 (1-r^2\cos^2\theta)dr\right)d\theta$

(8)　$z = i$ とするとき, z の偏角は $\boxed{\mathbf{15}}$ であり, z の平方根は $e^{i\frac{\pi}{4}}$ と $\boxed{\mathbf{16}}$ である.

(選択肢) ⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{4}$　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ $\dfrac{3\pi}{4}$　④ π　⑤ $e^{i\pi}$　⑥ $e^{i\frac{5\pi}{4}}$　⑦ $e^{i\frac{3\pi}{2}}$
⑧ $e^{i\frac{7\pi}{4}}$　⑨ $e^{i2\pi}$

(9) xy 平面の異なる 2 点 (a_1, b_1), (a_2, b_2) を通る直線の方程式の行列式による表示を次のように考える．求める直線の方程式を $Ax + By + C = 0$ (ここで A, B, C は定数) とおくと，(a_1, b_1), (a_2, b_2) をこの式に代入した式が成り立つ．この 3 つの式を A, B, C についての連立方程式 $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Aa_1 + Bb_1 + C = 0 \\ Aa_2 + Bb_2 + C = 0 \end{cases}$ とみると，この連立方程式は $\boxed{\mathbf{17}}$ から，求める直線の行列式表示は $\boxed{\mathbf{18}}$ である．

(選択肢) ⓪ 解が 1 つに定まらない　① 解が 1 つに定まる　② 解がない

③ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & a_1 + b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = 0$　④ $\begin{vmatrix} x & y & x + y \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$　⑤ $\begin{vmatrix} x + y & x & y \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

⑥ $\begin{vmatrix} x + y & 1 & 1 \\ a_1 + b_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$　⑦ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$　⑧ $\begin{vmatrix} x + y & x & y \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

⑨ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(10) 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ に対して行列式 $|A|$ の値を求めると，$|A| = \boxed{\mathbf{19}}$ であり，逆行列の $(1, 2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ となる．

(選択肢) ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4

(11) 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき，固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解くと，A の固有値は 2 と $\boxed{\mathbf{21}}$ であり，2 に対する固有ベクトルは $\boxed{\mathbf{22}}$ の定数倍で表される．

(選択肢) ⓪ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$　① $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$　② $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$　③ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　④ -7　⑤ -8

⑥ -9　⑦ 7　⑧ 8　⑨ 9