工学基礎・数学ミニマム　テスト 9

次の空欄 ($\boxed{\text{番号}}$) に当てはまるものを各々の選択肢から選びなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \boxed{\mathbf{1}}$.

$\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{2n}$ $(x \neq 0)$ とするとき, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{\pi}+0} f(x) = \boxed{\mathbf{2}}$.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$ ⑥ $\frac{1}{4}$ ⑦ $\frac{1}{5}$ ⑧ $\frac{1}{6}$
⑨ $+\infty$

(2) 関数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ は, $x = \boxed{\mathbf{3}}$ で極大値をとり, 漸近線は y 軸と $\boxed{\mathbf{4}}$ である.

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -2 ⑥ -1 ⑦ x 軸
⑧ $y = -x$ ⑨ $y = x$

(3) x が 0 に近いとき, $\cos x$ の 2 次近似式は $\boxed{\mathbf{5}}$ であることを使うと, $\cos 0.1$ の近似値は $\boxed{\mathbf{6}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $1+x$ ① $1-x$ ② $1-x+x^2$ ③ $1+\frac{1}{2}x^2$ ④ $1-\frac{1}{2}x^2$
⑤ 0.9 ⑥ 0.995 ⑦ 1.1 ⑧ 1.005 ⑨ 0.91

(4) 完全な球状を保ちながら体積が変化する特殊なゴム風船を考える. 体積が 0 の状態のこのゴム風船に, 毎秒 $9\ \mathrm{cm}^3$ の速度で水を注入しふくらませる. 半径が $9\ \mathrm{cm}$ になった瞬間での, 半径が増加する速度は毎秒 $\boxed{\mathbf{7}}$ cm となる.

(選択肢) ⓪ $\frac{1}{15\pi}$ ① $\frac{1}{18\pi}$ ② $\frac{1}{27\pi}$ ③ $\frac{1}{36\pi}$ ④ $\frac{1}{45\pi}$ ⑤ 15π ⑥ 18π
⑦ 27π ⑧ 36π ⑨ 45π

(5)　2変数関数 $z = e^{-x^2-y^2}$ に対して z_{xx}, z_{yx} を求めると, $z_{xx} = \boxed{\mathbf{8}}\, e^{-x^2-y^2}$, $z_{yx} = \boxed{\mathbf{9}}\, e^{-x^2-y^2}$ である.

(選択肢) ⓪ 4　① $4x$　② $4y$　③ $4x^2$　④ $4y^2$　⑤ $4xy$　⑥ $4(x^2-1)$
⑦ $4(y^2-1)$　⑧ $4\left(y^2-\dfrac{1}{2}\right)$　⑨ $4\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x dx = \boxed{\mathbf{10}}$,　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^2+1} dx = \boxed{\mathbf{11}}$ (ただし, 下の選択肢において対数は自然対数とする).

(選択肢) ⓪ $\dfrac{\pi}{2}-\log 2$　① $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\log 2$　② $\dfrac{\pi}{4}-\log 2$　③ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\log 2$
④ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$　⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ π　⑦ 2π　⑧ $-\pi$　⑨ -2π

(7)　累次積分の和 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 (x+1)dx\right) dy + \int_{-1}^0 \left(\int_{-y}^1 (x+1)dx\right) dy$ のそれぞれの積分順序を変えてまとめると $\boxed{\mathbf{12}}$ となり, この累次積分の値は $\boxed{\mathbf{13}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\displaystyle\int_1^0 \left(\int_{-x^2}^{x} (x+1)dy\right) dx$　① $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x+1)dy\right) dx$
② $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x^2} (x+1)dy\right) dx$　③ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x+1)dy\right) dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (x+1)dy\right) dx$　⑤ $\dfrac{5}{4}$　⑥ $\dfrac{17}{12}$　⑦ $\dfrac{5}{6}$　⑧ $\dfrac{1}{2}$　⑨ $\dfrac{19}{10}$

(8)　レムニスケート $r^2 = \cos 2\theta$ で囲まれる図形の面積は, 積分 $\boxed{\mathbf{14}}$ で求めることが出来, その値は $\boxed{\mathbf{15}}$ となる.

(選択肢) ⓪ $\dfrac{1}{2}$　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ $2\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 2\theta d\theta\right)$
⑥ $2\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 2\theta d\theta\right)$　⑦ $4\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta\right)$
⑧ $4\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta\right)$　⑨ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta$

(9) $z=-\sqrt{3}-3i$ とするとき, $\arg z=\boxed{\textbf{16}}$ である．また, オイラーの公式を用いて z を表すと $\boxed{\textbf{17}}$ となる．ただし, i は虚数単位, $\arg z$ は z の偏角とする．

(選択肢) ⓪ $\frac{\pi}{3}$ ① $\frac{2\pi}{3}$ ② π ③ $\frac{4\pi}{3}$ ④ $\frac{5\pi}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$ ⑥ $2\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

⑦ $2\sqrt{3}e^{\pi i}$ ⑧ $2\sqrt{3}e^{\frac{4\pi}{3}i}$ ⑨ $2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{3}i}$

(9) 行列 $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，積 AB の $(2,1)$ 成分は $\boxed{\textbf{18}}$ となる．

(選択肢) ⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑥ 6 ⑦ 7 ⑧ 8 ⑨ 9

(10) 連立方程式 $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & -2 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$ について, この連立方程式の係数行列を $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ とすると，行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{19}}$ である．クラメルの公式を用いて y を表すと, $y=\boxed{\textbf{20}}$ となる．

(選択肢) ⓪ 5 ① -5 ② 10 ③ -10 ④ 20 ⑤ -20

⑥ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ ⑦ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

⑧ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ ⑨ $\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

(11) 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I-A|=0$ を解くと, A の固有値は 2 と $\boxed{\textbf{21}}$ であり，2 に対する固有ベクトルは $\boxed{\textbf{22}}$ の定数倍で表される．

(選択肢 ⓪ 0 ① 1 ② -1 ③ 3 ④ -2 ⑤ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑥ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

⑦ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ⑧ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ⑨ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$