数学ミニマム補習プリント

１. 微分・偏微分

(1) (**１次近似** (pp.2-3))　　$x \fallingdotseq x_0$ のとき, $f(x) \fallingdotseq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

関連問題　$f(x) = \sqrt{x}$ の x_0 の近くでの一次近似は？ この式を利用して $\sqrt{99.98}$ の近似値を求めなさい.

(2) ($e^{\log x} = x$ **の計算** (p.8))　　$e^{\frac{1}{2}\log 9} = e^{\log 3} = 3$

類題　(i) $e^{\frac{1}{2}\log 4}$　(ii) $e^{\frac{1}{3}\log 8}$

(3) (**逆三角関数とその微分** (p.11-12))　　$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,　$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(4) (**不定形の極限** (pp.16-20))

$\dfrac{0}{0}$ **型**　　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h}{1} = 1$

∞^0 **型**　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x} = 0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

類題　(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$ $(a > 0)$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi - x}$　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 + 4x^2 - 2}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$　(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 3x}{9x^2}$　(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(a+x) - \log a}{x}$ (ただし, $a > 0$)

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$　(viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(5) (**マクローリン展開・ｎ次近似** (pp.20-27))

$f(x)$ のマクローリン展開 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

$f(x)$ の 0 の近くでのｎ次近似 : $f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

関連問題　(i) 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ のマクローリン展開を利用して, 関数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ をマクローリン展開しなさい.

(ii) 関数 $\dfrac{x}{e^x}$ をマクローリン展開しなさい.

(iii) x が 0 に近いとき, $\sin x(1 - \cos x)$ の３次近似式を求めなさい.
(sin x と $\cos x$ のマクローリン展開を参考にするとよい)

(iv) $\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開を利用して, arctan$x$ のマクローリン展開を求めなさい.

(v) $\sin x$ と e^x のマクローリン展開を利用して, $\dfrac{\sin x}{e^x}$ のマクローリン展開を求めなさい.

(6) (**関数の増減・凹凸・変曲点** (pp.28-32))

関数の増減：$f'(x) > 0$ なら増加. $f'(x) < 0$ なら減少.
関数の凹凸：$f'(x) = 0$ のとき, $f''(x) < 0$ なら極大, $f''(x) > 0$ なら極小.
$f''(x)$ の符号が変わる点を変曲点という.

関連問題　(i) 関数 $y = 2\sin x - \sin 2x$ $(0 < x < 2\pi)$ の極値を調べなさい.

(ii) 関数 $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ の極値をとる点と変曲点を調べなさい.

(iii) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^3$ のグラフが x 軸と交わる点, 極大となる点, 変曲点を調べなさい.

(iv) 半径の長さが 1, 中心角の大きさが θ ラジアンの扇形によって作られる円錐の容積を考える. この扇形の弧の部分の長さと, この円錐の容積を最大にする θ を求めなさい.

(7) (**偏微分の計算** (pp.32-35))

変数 x について偏微分するときは, y は単なる定数とみて通常の微分計算を行えばよい. 変数 y についての偏微分についても同様. $z=f(x,y)$ を x で偏微分したとき, z_x, f_x などの記号を使う. z_y, f_y も同様. z_x をさらに x で偏微分すると, z_{xx} と書く. y について偏微分したら z_{xy} と書く.

関連問題　(i) x と y の関数 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$ を偏微分しなさい.

(ii) x と y の関数 $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y^2}$ を偏微分しなさい.

(iii) 2変数関数 $f(x,y)=\log(e^x+y^2)$ に対して f_x, f_y, f_{xy} を求めなさい.

(iv) 2変数関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ に対して f_x, f_{xx}, f_{xy} を求めなさい.

(v) 2変数関数 $f(x,y)=x^y$ に対して f_{xy}, f_{yy} を求めなさい.

(8) (**2変数関数の1次化** (**接平面**) (pp.35-36))

2変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフを, $(a,b,f(a,b))$ を通って, xz 平面に平行な平面で切断した切り口の曲線は $z=f(x,b), y=b$. yz 平面に平行な平面で切断した切り口の曲線は $z=f(a,y), x=a$ である. 上の切り口として出てくる曲線の, $(a,b,f(a,b))$ における接線の傾きが $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ である. 接線の方程式はそれぞれ次の式で与えられる.

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a),\quad y=b \qquad\qquad z-f(a,b)=f_y(a,b)(y-b),\quad x=a$$

2変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフの, $(a,b,f(a,b))$ における接平面がもしあれば (注：偏微分可能で偏微分したものが連続ならいつでも接平面があることが保証される), それは上の2つの接線を含むはずだから, 必然的に

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

とならなければいけない.

関連問題　2変数関数 $z=\pi xy^2$ の点 $(2,1,2\pi)$ での1次化 (接平面) を考える. $y=1$ としたときの x の関数 $z=\pi x$ の $x=2$ の近くでの1次近似と, $x=2$ としたときの y の関数 $z=2\pi y^2$ の $y=1$ の近くでの1次近似を求めなさい. 最後に, 2変数関数 $z=\pi xy^2$ の点 $(2,1,2\pi)$ での1次化 (接平面) を求めなさい.

(9) (**勾配ベクトル・方向微分** (pp.37-42))

2変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフを $z=c$ という平面で切断して出来る曲線 (等高線) は $f(x,y)=c$ である. この曲線の ($z=c$ という平面上での) (a,b) における1次近似は, $z=f(x,y)$ と $z=c$ の1次化 $z-c=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ と $z-c=0$ から $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$ となる. これは曲線 $f(x,y)=c$ の (a,b) における接線の方程式であるので, $\begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix}$ は (a,b) における接線に直交するベクトルである. このベクトルは曲面 $z=f(x,y)$ の傾斜が最大の方向を向いたベクトルなので勾配ベクトルとよばれる.

また, 2変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフの $(a,b,f(a,b))$ における接平面の, ベクトル $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 方向の z の上昇量は $f_x(a,b)p+f_y(a,b)q$ であるので, $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 方向の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\{f_x(a,b)p+f_y(a,b)q\}$ である. これをこの接平面の $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 方向の方向微分という.

関連問題　(i) 曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 $(1,1,2)$ における勾配ベクトル, その方向への方向微分をそれぞれ求めなさい.

(ii) 曲面 $z=x^2+xy+y^2$ 上の点 $(-1,1,1)$ における勾配ベクトル, その方向への方向微分をそれぞれ求めなさい.

(10) (**合成関数の微分** (pp.42-44))

２変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフの, $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式において, $x-a$, $y-b$, $z-f(a,b)$ をそれぞれ x, y, z の微小変化と見て dx, dy, dz とかくと

$$dz = f_x dx + f_y dy = [f_x \ f_y]\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

となる. 変数 x, y がさらに２変数関数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ になっているなら, dz と同様に形式的に次の式を得る.

$$dx = [x_u \ x_v]\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}, \qquad dy = [y_u \ y_v]\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

これらをあわせると

$$dz = [f_x \ f_y]\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

となるが, $z=z(u,v)$ ともみれるので $dz=[z_u \ z_v]\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$ だから,

$$z_u = [f_x \ f_y]\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix}, \qquad z_v = [f_x \ f_y]\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}.$$

関連問題　(i)　２変数関数 $f(x,y)=x^y$ $(x>0)$ に $x=t$, $y=\dfrac{1}{t}$ を代入して得られる関数 $f(t,\dfrac{1}{t})$ を t で微分しなさい.

(ii)　r の１変数関数 $z=z(r)$ において, r が x と y の関数 $r=r(x,y)$ であるとき, z は x と y の２変数関数 $z=z(r(x,y))$ となる. このとき, z_x, z_y を求めなさい. 特に $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のとき, z_x, z_y を求めなさい.

(iii)　２変数関数 $z=\dfrac{1}{2y}f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ において, xz_x+yz_y を z を用いて表わしなさい.

また, ２変数関数 $w=g(x-2y)+h(x+2y)$ において, w_{yy}, w_{xx} の関係式を導きなさい.

２. 積分・二重積分・複素数

(1) (**置換積分・部分積分** (pp.48-51))

置換積分：$\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

部分積分：$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

関連問題　(i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$　(iii) $\displaystyle\int (\sin x)(1-\cos^2 x)dx$　(iv) $\displaystyle\int x\cos x dx$　(v) $\displaystyle\int \arctan x dx$

＊双曲線関数の積分　$\displaystyle\int \sinh x \cdot \cosh 2x dx$

(2) (**有理関数の積分** (pp.51-54))

$\dfrac{A}{(x-a)^n}$ や $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$ の形に分解する部分分数展開が基本.

$\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$ の計算は $X=x-a$ と置換すればよい.

$\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$ は x^2+bx+c を２次式の標準形になおせば, $\dfrac{Dx+E}{(x^2+d^2)^m}$ の形になる.

$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+d^2}dx$ の計算は $X=x^2+d^2$ と置換すればよい.

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+d^2}dx = \frac{1}{d}\arctan\frac{x}{d} + \text{積分定数}$

関連問題　$\dfrac{2}{x(x-1)(x-2)}$ を部分分数分解し, $\displaystyle\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}dx$ を計算しなさい.

(3) (**三角関数の積分** (pp.54-57))

三角関数の積の積分：三角関数の積を和に直す公式 (p.54 参照) が有効.
三角関数の有理式の積分：適当な置換をすると有理式の積分に持ち込める (p.55 参照).

関連問題 $\displaystyle\int \sin 6x \sin 2x dx$

(4) (**無理関数の積分** (pp.57-61))

根号の中が 1 次式なら, 根号のついた全体を X で置換するのが有効.
根号の中が 2 次式や分数式なら, 適当な置換をすると有理式の積分に持ち込める (p.57 参照).

関連問題 $\displaystyle I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$

(5) (**定積分** (pp.61-63))

置換積分：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \quad (a = g(\alpha), b = g(\beta))$

部分積分：$\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

関連問題 (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ (iii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)(1-\cos^2 x)dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

(v) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan x dx$

(6) (**広義積分** (pp.63-68))

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{[x\log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right\} = -1$$

類題 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7) (**二重積分** (pp.68-71))

$$\begin{aligned}&\iint_D x dxdy \qquad (D = \{0 \leqq x \leqq 1, x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}\})\\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x dy\right) dx = \int_0^1 [xy]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} - x^3\right) dx = \frac{3}{20}\end{aligned}$$

例えば変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ をすると, ヤコビアン r がでて,

$$\begin{aligned}&\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy \qquad (D = \{1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\})\\ &= \iint_B \frac{r}{r^2} drd\theta \qquad (B = \{1 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\})\\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\theta\right) dr = \cdots\end{aligned}$$

類題 (i) $\displaystyle\iint_D x dxdy$ $(D = \{y^2 \leqq x, x-2 \leqq y\})$ (ii) $\displaystyle\iint_D (x+2y) dxdy$ $(D = \{2x+y \leqq 2, x \geqq 0, y \geqq 0\})$

(iii) $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x} dxdy$ $(D = \{x^2+y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\})$ (iv) $\displaystyle\iint_D x dxdy$ $(D = \{x^2+y^2 \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\})$

(8) (**面積等** (pp.71-79))

関連問題　$x = 2\cos t, y = \sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される曲線で囲まれる部分の面積を求めなさい.

(9) (**複素数** (pp.80-83))

$z = a + bi$ のとき, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\arg z = \arctan \dfrac{b}{a}$ (ただし一般角).

$|z| = r$, $\arg z = \theta$ のとき, z の極形式表示とは $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のことで, オイラーの公式を使って $z = re^{i\theta}$ ともかく. この z の平方根は $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$ で与えられる.

関連問題　(i) $z = 1 - \sqrt{3}i$ とするとき, z^2, $|z|^2$, z の極形式表示, z の平方根を求めなさい.

(ii) $z = 1 + \sqrt{3}i$ とするとき, z^2, $|z|^2$, z の極形式表示, z の平方根を求めなさい.

(iii) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とするとき, $|z|$, $\dfrac{1}{z}$, その極形式表示を求めなさい.

(iv) $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき, $|z|$, $\arg z$, z^{10} を求めなさい.

(v) $z = (1+\sqrt{3}i)^5$ とするとき, $|z|$, z の極形式表示を求めなさい.

(vi) $z = \cos 2x + i\sin 2x$ とするとき, $|z^2|$, $\arg z^2$ を求めなさい. また, オイラーの公式を使って z^2 を表しなさい.

(vii) $e^{i\pi}$ を求めなさい.

(viii) $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}i$ の極形式をオイラーの公式を用いて表わし, z の平方根を求めなさい.

３. 線形代数

(1) (**行列の演算** (pp.84-86))

行列の和・差は同じ型の行列どうしでのみ出来, 成分ごとの和・差を行えばよい. 積 AB は A の列数と B の行数が等しいときに出来る (p.85 参照). ${}^tA$ は A の行と列を入れ替えて出来る行列.

関連問題　(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ に対して, BA を求めなさい.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ 対して, AB を求めなさい.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して, AB を求めなさい.

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ 対して, AB を求めなさい.

(v) $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ について, $AB = BA$ が成り立つような x, y を求めなさい.

(vi) $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -11 & 16 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 対して, AB を求めなさい.

(2) (**掃き出し法 (連立方程式・逆行列**) (pp.87-92))

連立方程式を解いていくとき行う操作は　（１）ある式を何倍かする,（２）ある式に他の式の何倍かを加える, の２つの操作である．この操作で文字を表に出すことなく, 行列の計算だけで行うのが行列の (行) 基本変形で, この操作で連立方程式を解く方法の一つとして「掃き出し法」と呼ばれるものがある (pp.88-89 参照).

$AB = BA = I$ 単位行列 となる B を A の逆行列といい, A^{-1} と表す．「掃き出し法」を用いて逆行列を求めることも出来る (pp.91-92 参照).

関連問題　行列 A を $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ とする．連立方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解きなさい．また, A^{-1} を求めなさい.

(3) (**行列式** (pp.92-100))

２次や３次の行列式は「サラスの方法」で計算できる．４次以上のときは次の変形で「余因子展開」にもち込む.

（１）単位行列の行列式の値は 1

（２）ある行（あるいは列）の各要素の共約数が a なら, 各要素を a で約した行列式の a 倍がもとの行列式の値になる

（３）ある行（あるいは列）を k 倍すると行列式の値も k 倍になる

（４）ある行に他の行（あるいは列どうしで）の何倍かを加えても行列式の値は変わらない

（５）２つの行（あるいは列）を交換すると行列式の値は -1 倍になる

（６）２つの行（あるいは列）が等しければ行列式の値は 0

関連問題　(i) 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \alpha \\ \beta & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ に対して，${}^tA = A^{-1}$ が成り立っているとする．このとき, α, β, $|A|$ を求めなさい.

(ii) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 13 & 15 \\ 111 & 315 & 618 \end{vmatrix}$ を計算する．基本行変形により $(2,1)$-成分と $(3,1)$-成分を 0 と変形し, この行列式の値を求めなさい.

(4) (**余因子行列と逆行列** (p.101))

A の (i,j) 余因子を $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$ とするとき, A の余因子行列 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$ で与えられる．このとき, A が正則なら $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}{}^t\mathcal{A}$.

関連問題 (i) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，行列式 $|\,A\,|$ の値を求め，逆行列 A^{-1} の $(1,2)$ 成分を余因子行列を考えることにより求めなさい.

(ii) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ に対して，逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分, $(1,2)$ 成分を求めなさい.

(5) (**クラメルの公式** (p.102-103))

連立方程式を解く方法として,「掃き出し法」の他に「クラメルの公式」 (p.102 参照) がある.

関連問題　(i) 連立方程式 $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & 2y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$ をクラメルの公式を用いて解きなさい.

(ii) 連立方程式 $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$ をクラメルの公式を用いて解きなさい.

(iii) 連立方程式 $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 6y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$ について, この連立方程式の係数行列 $A = \begin{bmatrix} a & 6 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式 $|\,A\,|$ の値を求めなさい．また, この連立方程式が解をもたない条件を求めなさい.

(6) (**１次独立・１次従属** (p.103-105))

実数を成分とするｎ個のベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が一次独立とは, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を実数として $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$ のとき, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ であるときをいう．言い換えれば, あるベクトルが他のベクトルの１次結合でかけないときである．１次従属とは１次独立でないときをいう．ｎ次元空間のｎ個の１次独立なベクトルの組を基底という．

関連問題　実数を成分とする３次列ベクトル全体を $\boldsymbol{R^3}$ で表す．$\boldsymbol{R^3}$ における列ベクトルの組 S_1, S_2, S_3, S_4 を

$$S_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_3 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad S_4 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．このうち１次従属であるもの, $\boldsymbol{R^3}$ の基底をなすものを求めなさい．

(7) (**固有値・固有ベクトル** (p.106-108))

行列 A について, $|\lambda I - A| = 0$ (固有方程式) の解を A の固有値という．ただし, I は単位行列とする．このとき $Ax = \lambda x$ をみたすゼロベクトルでないベクトル x を λ の固有ベクトルという．

関連問題　(i)　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解きなさい．

(ii)　行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解き, それぞれの固有ベクトルを求めなさい．

(iii)　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解きなさい．

(iv)　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解き, それぞれの固有ベクトルを求めなさい．

(v)　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解き, それぞれの固有ベクトルを求めなさい．

(vi)　行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ の固有値を計算する．I を単位行列とするとき, 固有方程式 $|\lambda I - A| = 0$ を解き, それぞれの固有ベクトルを求めなさい．