

問1 運動エネルギーの次元（ディメンション）を求めよ。ここで、距離をL，質量をM，時間をTで表す。

$M^1 L^0 T^{-2}$	$M^1 L^0 T^{-1}$	$M^1 L^1 T^{-2}$	$M^1 L^1 T^{-1}$
$M^1 L^2 T^{-1}$	$M^1 L^2 T^{-2}$	$M^2 L^2 T^{-2}$	$M^2 L^2 T^{-1}$

### 解答

運動エネルギーは  $E = \frac{1}{2}mv^2$  と表される。質量  $m$  の単位はkgでその次元はMである。速度  $v$  の単位はm/s

でその次元は  $L^1 T^{-1}$  である。従って、運動エネルギー  $E = \frac{1}{2}mv^2$  の単位は  $\text{kg} \cdot (\text{m/s})^2$  でその次元は  $M^1 L^2 T^{-2}$  である。正解は  $M^1 L^2 T^{-2}$  である。

### ポイント

- すべての物理量は単位と次元をもっている。
- 物理量の単位は基本単位（m, kg, s, A）を使って表される。
- 物理量の関係式の両辺の次元は一致している。
- 物理量の関係式を使って、物理量を基本単位で表すことができ、その次元を知ることができる。
- 逆に、物理量の次元を調べることによって、物理量の関係を知ることができる（次元解析）。

### 類題

問1 (力) = (質量) × (加速度) 及び (仕事) = (力) × (距離) の関係を考慮して、仕事の次元（ディメンション）を求めよ。ここで、距離をL，質量をM，時間をTで表す。

$M^1 L^0 T^{-2}$	$M^1 L^0 T^{-1}$	$M^1 L^1 T^{-2}$	$M^1 L^1 T^{-1}$
$M^1 L^2 T^{-1}$	$M^1 L^2 T^{-2}$	$M^2 L^2 T^{-2}$	$M^2 L^2 T^{-1}$

問2 3次元空間中を質量  $m$  の質点が運動している。その位置ベクトル  $r$  が時間  $t$  の関数として、

$$r(t) = \sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

と表されるとき、運動量ベクトル  $p(t) = mv$  の  $x$  成分を求めよ。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトル、 $v$  は速度、 $\omega$  は定数である。

$m\omega(\sin \omega t + \cos \omega t)$	$m\omega(\sin \omega t - \cos \omega t)$
$m\omega(\sin \omega t + t \cos \omega t)$	$m\omega(\sin \omega t - t \cos \omega t)$
$m(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t)$	$m(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)$
$m\omega \cos \omega t$	$-m\omega \cos \omega t$

### 解答

速度ベクトル  $v$  は、その定義より、位置ベクトル  $r$  の時間微分である。

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \cos \omega t \mathbf{i} - \omega \sin \omega t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

従って、運動量ベクトルは、

$$p = mv = m\omega \cos \omega t \mathbf{i} - m\omega \sin \omega t \mathbf{j} + mt \mathbf{k} \text{ となる。}$$

この  $x$  成分は  $m\omega \cos \omega t$  であるから、正解は  $m\omega \cos \omega t$  である。

### ポイント

- 位置ベクトルの時間微分 = 速度ベクトル
- 速度ベクトルの時間微分 = 加速度ベクトル
- ベクトルの微分の定義 (教科書 P.13 参照)
- ベクトルの微分の公式 (教科書 P.25 参照)
- 合成関数の微分の公式 (教科書 P.17 参照)

### 類題

問2 3次元空間中を質量  $m$  の質点が運動している。その位置ベクトル  $r$  が時間  $t$  の関数として、

$$r(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

と表されるとき、角運動量ベクトル  $L(t) = r \times mv$  の  $x$  成分を求めよ。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトルである。 $v$  は速度である。

$m(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$m(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$m(\sin \omega t + t \cos \omega t)$	$m(\sin \omega t - t \cos \omega t)$
$m(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t)$	$m(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)$
$m(\cos \omega t + t \sin \omega t)$	$m(\cos \omega t - t \sin \omega t)$

問3 質量  $m$  の質点が3次元空間中を運動している。その位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は、時間  $t$  の関数として、 $\mathbf{r}(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j} + \omega t \mathbf{k}$  と表される。この質点の運動エネルギー  $E(t)$  を求めよ。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトル、 $\omega$  は定数である。

$$m(\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j} + \omega t \mathbf{k})/2$$

$$m(\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j} + \omega t \mathbf{k})/2$$

$$m(\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j} + \omega t \mathbf{k})/2$$

$$m(\sin \omega t \mathbf{i} - \cos \omega t \mathbf{j} + \omega t \mathbf{k})/2$$

$$m(\sin \omega t + \cos \omega t + \omega)/2$$

$$m(\sin \omega t - \cos \omega t + \omega)/2$$

$$m\omega/2$$

$$m\omega^2$$

### 解答

運動エネルギーは、 $E = \frac{1}{2}mv^2$  と表される。ここで  $v$  は速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の大きさ（絶対値）である。

速度ベクトルは、 $\mathbf{v} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j} + \omega \mathbf{k}$  であるから、

その絶対値は、 $v = \sqrt{(-\omega \sin \omega t)^2 + (\omega \cos \omega t)^2 + (\omega)^2} = \sqrt{2(\omega)^2}$  である。

従って、 $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2\omega^2 = m\omega^2$  となり、正解は  $m\omega^2$  である。

### ポイント

- ベクトルの成分表示
- ベクトルの絶対値
- ベクトルの内積

### 類題

問3 質量  $m$  の質点が3次元空間中を運動している。その位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は、時間  $t$  の関数として、

$\mathbf{r}(t) = \sin 2t \mathbf{i} + 3e^{-t} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$  と与えられている。この質点の運動量  $\mathbf{p}$  の時間微分  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  を求めよ。ただし、

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトルである。

$$m \cos 2t \mathbf{i} + 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$-m \cos 2t \mathbf{i} - 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$4m \cos 2t \mathbf{i} + 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$-4m \cos 2t \mathbf{i} + 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$m \sin 2t \mathbf{i} + 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$-m \sin 2t \mathbf{i} - 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$4m \sin 2t \mathbf{i} + 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

$$-4m \sin 2t \mathbf{i} + 3me^{-t} \mathbf{j} + 2m \mathbf{k}$$

問4 質量  $m$  の質点が直線上を運動している。質点の運動方向を  $x$  軸の正の向きとする。質点には速度の大きさの2乗に比例する抵抗力  $F = -k v^2 \mathbf{i}$  が作用している。ここで、 $\mathbf{i}$  は  $x$  軸方向の単位ベクトル、 $k$  は正の定数である。時刻  $t = 0$  で質点は座標の原点にあり、その速度は  $\mathbf{v} = \mathbf{i}$  であった。運動方程式を解き、速度ベクトル  $\mathbf{v}$  を時間  $t$  の関数として求めよ。

$$\begin{array}{llll} \mathbf{v}(t) = \frac{1}{kt/m-1} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = \frac{1}{kt/m+1} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = \frac{-1}{kt/m+1} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = \frac{-1}{kt/m-1} \mathbf{i} \\ \mathbf{v}(t) = \frac{kt}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = -\frac{kt}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = \frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = -\frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} \end{array}$$

### 解答

運動方程式は、 $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k v^2 \mathbf{i}$  である。

題意より速度ベクトル  $\mathbf{v}$  は  $x$  成分のみをもつので、 $\mathbf{v} = v \mathbf{i}$  と書ける。

これを運動方程式に代入すると、 $x$  成分に関する以下の式を得る。

$$m \frac{dv}{dt} = -k v^2 \quad \text{これは、変数分離できて、} \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt \quad \text{両辺を積分すると、}$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -\frac{k}{m} dt \quad \text{従って、} \quad -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m} t + C, \quad \text{ここで、} C \text{ は積分定数である。}$$

初期条件 ( $t = 0$  のとき  $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ 、すなわち、 $v = 1$ ) より、 $C = -1$  となる。

$$\text{従って、} \quad v = \frac{1}{\frac{k}{m} t + 1} \text{ である。} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\frac{kt}{m} + 1} \mathbf{i} \text{ となり、正解は } \quad \text{である。}$$

### ポイント

- 微分方程式 (教科書 P.18 参照)
- 変数分離形 (教科書 P.26 参照)
- 積分定数、初期条件 (教科書 P.28 参照)

### 類題

問4 質量  $m$  の質点が直線上を運動している。質点には速度に比例する抵抗力  $F = -k v$  が作用している。質点の運動方向に  $x$  軸をとる。時刻  $t = 0$  で質点は座標の原点にあり、その速度は  $\mathbf{v} = 2 \mathbf{i}$  であった。ただし、 $\mathbf{i}$  は  $x$  軸方向の単位ベクトルである。また、 $k > 0$  は定数である。運動方程式を解き、速度ベクトル  $\mathbf{v}$  を時間  $t$  の関数として求めよ。

$$\begin{array}{llll} \mathbf{v}(t) = 2e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = -2e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = -e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} \\ \mathbf{v}(t) = \frac{kt}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = -\frac{kt}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = \frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} & \mathbf{v}(t) = -\frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} \mathbf{i} \end{array}$$

問5 質量  $m$  の質点が3次元空間中を運動している。質点には保存力  $F$  が作用しており、その力のポテンシャルが  $\phi(x, y, z) = cxyz$  と表される。この質点が  $r_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$  から  $r_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$  まで移動した。このときの位置エネルギーの変化を求めよ。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトルである。 $c$  は定数である。

$$\begin{array}{lll} -c(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2) & c(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2) & c(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2)/2 \\ -c(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2)/2 & mc(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2) & -mc(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2) \\ -mc(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2)/2 & mc(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2)/2 & \end{array}$$

### 解答

位置エネルギー  $U$  は、線積分  $U(x, y, z) = -\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  で定義される。

ここで、点  $(x_0, y_0, z_0)$  は位置エネルギーの基準点である。すなわち、 $U(x_0, y_0, z_0) = 0$  である。

位置エネルギーの定義式に、力のポテンシャルの定義式  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$  を代入すると、

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} d\phi = \phi(x, y, z) - \phi(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

従って、位置エネルギーの変化は、

$$U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) = c(x_2y_2z_2 - x_1y_1z_1) \text{ となり、}$$

正解は である。

### ポイント

- 線積分とその計算法 (教科書 P.48 参照)
- 偏微分と全微分 (教科書 P.51 参照)
- 微分演算子  $\nabla$  (ナブラ) (教科書 P.46 参照)
- ベクトル場とスカラー場、ベクトル場がスカラーポテンシャルを持つための必要十分条件
- 仕事、運動エネルギー、位置エネルギー、力学的エネルギーの保存則 (教科書 P.36 参照)

### 類題

問5 質量  $m$  の質点が3次元空間中を運動している。質点には保存力  $F$  が作用しており、その力のポテンシャルが  $\phi(x, y, z) = cxyz$  と表される。この質点が  $r_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$  から  $r_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$  まで移動した。運動エネルギーの変化 (位置  $r_2$  での運動エネルギーから位置  $r_1$  における運動エネルギーを引いた値) を求めよ。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトルである。 $c$  は定数である。

$$\begin{array}{lll} c(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2) & c(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2) & -c(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2) \\ -c(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2) & mc(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2) & mc(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2) \\ -mc(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2) & -mc(x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2) & \end{array}$$

問6 1次元波動方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に従う波がある。ただし、 $A$  は正の定数である。この波の振幅

は5[m]、波長は3[m]、周波数(振動数)は50[Hz]であることが知られた。 $A$ の値はいくらか。

- |  |   |  |  |
|--|---|--|--|
| 22500[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]   | 1500[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]   | 200[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]   | 150[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]   |
| 1/22500[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ] | 1/1500[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ] | 1/200[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ] | 1/150[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ] |

### 解答

$x$ 軸方向に進む波は、一般に、波動関数  $u(x,t) = u_0 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right)$  で表される。ここで、 $u_0$  は振幅、

$\lambda$  は波長、 $T$  は周期、 $\delta$  は初期位相である。これより、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \cdot \left( -\frac{2\pi}{T} \right) \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u_0 \cdot \left( -\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \cdot \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u_0 \cdot \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right)$$

波動方程式より、 $A = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big/ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\lambda}{T} \right)^2 = (\lambda\nu)^2 = c^2$  となる。ここで、 $\nu$  は振動数、 $c$  は位相速度

である。問題では、 $\lambda = 3$  [m]、 $\nu = 50$  [1/s]であるから、正解は である。

### ポイント

- 振動と波動(教科書P.52参照)
- 波動方程式(教科書P.61参照)
- 波動方程式の平面波解
- 波動方程式の境界条件と初期条件

### 類題

問6 1次元波動方程式、 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に従う波がある。ただし、 $c$  は正の定数である。この波の振

幅は3[m]、波長は4[m]、周波数(振動数)は500[Hz]であることが知られた。 $c$ の値はいくらか。

- |             |             |            |            |
|-------------|-------------|------------|------------|
| 2000[m/s]   | 1500[m/s]   | 200[m/s]   | 150[m/s]   |
| 1/2000[s/m] | 1/1500[s/m] | 1/200[s/m] | 1/150[s/m] |

問7 絶対屈折率（真空に対する屈折率） $n_1$ の媒質1と絶対屈折率 $n_2$ の媒質2が接している。その界面は平面である。媒質1から媒質2へ光波が伝播している。この界面での媒質1に対する媒質2の相対屈折率を $n_{12}$ とする。媒質1中で光速を $c_1$ 、媒質2中で光速を $c_2$ とする。以下の関係のうち正しいものはどれか。

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad n_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \qquad n_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}$$

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad n_{12} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \qquad n_{12} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}$$

### 解答

媒質1に対する媒質2の相対屈折率 $n_{12}$ の定義は、 $n_{12} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$ である。ホイヘンスの原理より、

$n_{12} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$ が成立する。真空に対する物質の相対屈折率を、物質の絶対屈折率という。

媒質1の絶対屈折率は、 $n_1 = \frac{c}{c_1}$ であり、媒質2の絶対屈折率は、 $n_2 = \frac{c}{c_2}$ である。従って、

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$ の関係がある。正解は である。

### ポイント

- ホイヘンスの原理（教科書 P.69 参照）

### 類題

問7 絶対屈折率（真空に対する屈折率） $n_1$ の媒質1と絶対屈折率 $n_2$ の媒質2が接している。その界面は平面である。媒質1から媒質2へ波が伝播している。この界面での媒質1に対する媒質2の相対屈折率 $n_{12}$ 及び臨界角 $\theta_c$ に関する以下の関係のうち正しいものはどれか。ただし、 $n_1 > n_2$ とする。

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} \quad \sin \theta_c = \frac{1}{n_{12}} \qquad n_{12} = \frac{n_1}{n_2} \quad \cos \theta_c = \frac{1}{n_{12}}$$

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} \quad \tan \theta_c = n_{12} \qquad n_{12} = \frac{n_1}{n_2} \quad \tan \theta_c = \frac{1}{n_{12}}$$

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad \sin \theta_c = n_{12} \qquad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad \cos \theta_c = n_{12}$$

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad \tan \theta_c = n_{12} \qquad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad \tan \theta_c = \frac{1}{n_{12}}$$

問8 温度 500[K]の単原子理想気体がある。この気体 1[mol]の内部エネルギー[J]を有効数字 1桁で計算し(有効数字 2桁目以降切り捨て), その数値を示せ。ただし, 単原子分子の質量を  $2 \times 10^{-26}$  [kg], 気体定数を  $8$  [J/(mol · K)], アボガドロ数を  $6 \times 10^{23}$  [/mol]とする。

- |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $1 \times 10^3$ | $2 \times 10^3$ | $3 \times 10^3$ | $4 \times 10^3$ | $5 \times 10^3$ | $6 \times 10^3$ |
| $7 \times 10^3$ | $8 \times 10^3$ | $9 \times 10^3$ |                 |                 |                 |

### 解答

エネルギー等分配則によれば, 自由度  $f$  の分子 1個が持つ運動エネルギーの平均値は,  $\frac{1}{2} f k T$  である。

ここで,  $k$  はボルツマン定数,  $T$  は絶対温度である。この分子からなる理想気体 1モルの内部エネルギー

$-U$  は,  $U = \frac{1}{2} f k T \cdot N_{av}$  である。ここで  $N_{av}$  は, アボガドロ数である。気体定数は,  $R = k N_{av}$  であるから,

$U = \frac{1}{2} f k T \cdot N_{av} = \frac{1}{2} f R T = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot 500$  となり, 正解は である。

### ポイント

- エネルギー等分配則 (教科書 P.113 参照)
- 理想気体の分子間相互作用
- 内部エネルギー

### 類題

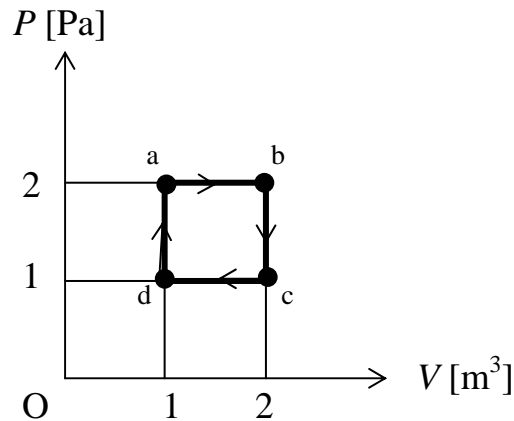
問8 温度 300[K]の単原子理想気体がある。1つの単原子分子の平均の運動エネルギー[J]を有効数字 1桁で計算し(有効数字 2桁目以降切り捨て), その数値を示せ。ただし, 単原子分子の質量を  $2 \times 10^{-26}$  [kg], 気体定数を  $8$  [J/(mol · K)], アボガドロ数を  $6 \times 10^{23}$  [/mol]とする。

- |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $1 \times 10^{-21}$ | $2 \times 10^{-21}$ | $3 \times 10^{-21}$ | $4 \times 10^{-21}$ | $5 \times 10^{-21}$ | $6 \times 10^{-21}$ |
| $7 \times 10^{-21}$ | $8 \times 10^{-21}$ | $9 \times 10^{-21}$ |                     |                     |                     |



問9 2モルの理想気体が  $P$ - $V$  図上の線で示したように、状態 a 状態 b 状態 c 状態 d 状態 a と変化した。この過程は準静的過程である。この気体が外部にした仕事[J]を有効数字1桁で計算し(有効数字2桁目以降切り捨て)、その数値を示せ。ただし、気体定数を  $8 \text{ [J/(mol} \cdot \text{K)]}$ 、アボガドロ数を  $6 \times 10^{23} \text{ [/mol]}$  とする。

1      2      3      4      5      6      7      8      9



**解答**

気体の体積変化 ( $V_1$  から  $V_2$ ) によって、気体が外部にする仕事  $W_{1 \rightarrow 2}$  は、 $W_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$  で表される。

題意の仕事は、 $W = W_{a \rightarrow b} + W_{b \rightarrow c} + W_{c \rightarrow d} + W_{d \rightarrow a}$  である。ここで、 $W_{a \rightarrow b} = \int_1^2 2 dV = 2$ 、

$W_{a \rightarrow b} = \int_1^2 2 dV = 2$ 、 $W_{b \rightarrow c} = \int_2^2 p dV = 0$ 、 $W_{c \rightarrow d} = \int_2^1 1 dV = -1$ 、 $W_{d \rightarrow a} = \int_1^1 p dV = 0$  である。

従って、正解は である。

**ポイント**

- 気体が体積変化によって外部にする仕事 (教科書 P.87 参照)
- 理想気体が “ 等温的な ” 体積変化によって外部にする仕事 (教科書 P.90 参照)
- 理想気体が “ 断熱的な ” 体積変化によって外部にする仕事 (教科書 P.95 参照)

**類題**

問9 2モルの理想気体が等圧変化により膨張した。最初、気体は温度が  $500 \text{ [K]}$ 、体積が  $2 \text{ [m}^3\text{]}$  であったが、等圧変化後に体積が  $4 \text{ [m}^3\text{]}$  になった。この過程は準静的過程である。この気体が外部にした仕事[J]を有効数字1桁で計算し(有効数字2桁目以降切り捨て)、その数値を示せ。ただし、気体定数を  $8 \text{ [J/(mol} \cdot \text{K)]}$ 、アボガドロ数を  $6 \times 10^{23} \text{ [/mol]}$  とする。

$1 \times 10^3$        $2 \times 10^3$        $3 \times 10^3$        $4 \times 10^3$        $5 \times 10^3$        $6 \times 10^3$        $7 \times 10^3$   
 $8 \times 10^3$        $9 \times 10^3$

問 10 温度 500[K]の高温熱源と温度 100[K]の低温熱源を用いて運転されるカルノーサイクルがある。これを 1 サイクル運転したとき、高温熱源から 10[J]の熱量を吸収した。このとき、このサイクルが外にした仕事[J]を有効数字 1 桁で計算し(有効数字 2 桁目以降切り捨て)、その数値を示せ。ただし、気体定数を  $8 \text{ [J/(mol} \cdot \text{K)]}$ 、アボガドロ数を  $6 \times 10^{23} \text{ [/mol]}$  とする。

1            2            3            4            5            6            7            8            9

### 解答

熱機関の効率は、 $\eta = \frac{W}{Q_H}$  で定義される。ここで、 $Q_H$  は高温熱源から熱機関が得た熱量、 $W$  は熱機関

がする仕事である。熱機関が低温熱源に捨てる熱量を  $Q_L$  とすれば、 $W = Q_H - Q_L$  である。理想気体を作業物質とする熱機関をカルノーエンジンという。カルノーエンジンは、高温熱源と熱平衡させる等温的体積膨張過程、断熱的体積膨張過程、低温熱源と熱平衡させる等温的体積圧縮過程、断熱的圧縮過程から構成される 1 つのサイクルで運転される。これをカルノーサイクルという。カルノーエンジンの効

率は、 $\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{T_H - T_L}{T_H}$  であることが示される。ここで、 $T_H$  は高温熱源の絶対温度、 $T_L$  は低温熱源

の絶対温度である。従って、 $W = \frac{T_H - T_L}{T_H} Q_H = \frac{500 - 100}{500} \cdot 10$  となり、正解は    である。

### ポイント

- カルノーサイクル(教科書 P.98 参照)
- カルノーエンジンの効率(教科書 P.101 参照)

### 類題

問 10 高温熱源 500[K]、低温熱源 100[K]を用いて運転されるカルノーサイクルの効率を有効数字 1 桁で計算し(有効数字 2 桁目以降切り捨て)、その数値を示せ。ただし、気体定数を  $8 \text{ [J/(mol} \cdot \text{K)]}$ 、アボガドロ数を  $6 \times 10^{23} \text{ [/mol]}$  とする。

0.1            0.2            0.3            0.4            0.5            0.6            0.7  
0.8            0.9

問 11 単原子分子理想気体の定圧モル比熱は  $\frac{5}{2}R$  である。ここで、 $R$  は気体定数である。1[mol]の単原子分子理想気体が圧力一定の条件で暖められ、その温度が  $T_1$  から  $T_2$  まで上昇した。この過程は準静的過程である。この過程における理想気体のエントロピー[J/K]の変化を与える式として、正しいものを選択せよ。

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{5R}{2T} dT \quad -\int_{T_1}^{T_2} \frac{5R}{2T} dT \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{5R}{T} dT \quad -\int_{T_1}^{T_2} \frac{5R}{T} dT$$

$$\frac{5R}{2}(T_2 - T_1) \quad 5R(T_2 - T_1) \quad \frac{5R}{2}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \quad 5R\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

### 解答

定圧モル比熱は、 $C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$  で定義される。ここで、 $\Delta Q$  は1モルの気体が吸収した熱量であり、 $\Delta T$  は、そのときの気体の温度変化である。温度  $T$  の気体1モルが等温的に熱量  $\Delta Q$  を吸収したときのエントロピー変化は、 $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$  である。単原子分子理想気体の場合には、 $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{C_p \Delta T}{T} = \frac{5R}{2T} \Delta T$  である。1[mol]の単原子分子理想気体が、温度  $T_1$  から  $T_2$  まで定圧的に変化する過程でのエントロピー変化は、これを積分して得られる。従って、正解は である。

### ポイント

- エントロピー変化（教科書 P.102, 106 参照）
- 状態量，定圧モル比熱，定積モル比熱（教科書 P.88, 103 参照）
- 可逆過程，不可逆過程，準静的過程（教科書 P.91, 103 参照）
- エントロピー増大の法則（教科書 P.107 参照）

### 類題

問 11 理想気体の定積モル比熱は  $\frac{3}{2}R$  である。ここで、 $R$  は気体定数である。2[mol]の理想気体が体積が一定の条件で暖められその温度が  $T_1$  から  $T_2$  まで上昇した。この過程は準静的過程である。この過程における理想気体のエントロピー[J/K]の変化を与える式として、正しいものを選択せよ。

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{3R}{2T} dT \quad -\int_{T_1}^{T_2} \frac{3R}{2T} dT \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{3R}{T} dT \quad -\int_{T_1}^{T_2} \frac{3R}{T} dT$$

$$\frac{3R}{2}(T_2 - T_1) \quad 3R(T_2 - T_1) \quad \frac{3R}{2}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \quad 3R\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

問 12 単原子分子理想気体がある。この気体の分子の速さ（速度の大きさ） $v$ の分布はマックスウェル分布に従っており， $\varphi(v) = 4\pi n v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$  で与えられる。ここで， $m$  は分子の質量， $k$  はボルツ

マン定数， $T$  は温度である。 $v$  の平均値  $\bar{v}$  の表式として正しいものを示せ。 $\bar{v} = \frac{\int_0^\infty v\varphi(v)dv}{\int_0^\infty \varphi(v)dv}$  で求められ，

$\int_0^\infty \varphi(v)dv = n$  である。公式  $\int_0^\infty x^3 \exp(-\alpha x^2)dx = \frac{1}{2\alpha^2}$  を利用せよ。

$$\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{kT}{2m}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \left(\frac{kT}{2m}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{kT}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{kT}{2m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

### 解答

$$\text{題意より， } \bar{v} = \frac{\int_0^\infty v\varphi(v)dv}{\int_0^\infty \varphi(v)dv} = \frac{1}{n} \cdot 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{m}{2kT}v^2\right) dv = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2$$

となり，正解は である。

### ポイント

- ボルツマン因子（教科書 P.115 参照）とマックスウェルの速度分布関数（教科書 P.116 参照）
- マックスウェルの速度分布における分子の平均速度と 2 乗平均速度（教科書 P.117 参照）

### 類題

問 12 単原子分子理想気体がある。この気体の分子の速さ（速度の大きさ） $v$ の分布はマックスウェル分布に従っており， $\varphi(v) = 4\pi n v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$  で与えられる。ここで， $m$  は分子の質量， $k$  はボル

ツマン定数  $T$  は温度である。分布の最大値を与える  $v$  の表式として正しいものを示せ。

$$\left(\frac{2kT}{m}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \left(\frac{2kT}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{kT}{2m}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \left(\frac{kT}{2m}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{kT}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{kT}{2m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

問 13 電界強度が  $z$  軸からの距離  $r$ [m] に反比例し,  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$  [N/C] と表される静電界が存在する。ここで,  $\mathbf{r}$  は  $z$  軸上の任意の点を始点とし  $x$   $y$  平面に平行なベクトルである。ただし,  $\epsilon_0$ [F/m] は真空の誘電率,  $\lambda$ [C/m] は定数,  $\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$  は  $\mathbf{r}$  方向を向く単位ベクトル, また  $r \neq 0$  とする。  $z$  軸からの距離  $a$ [m] の位置を基準としたとき,  $z$  軸からの距離  $b$ [m] の位置の静電ポテンシャル (電位) を求めよ。

$$\begin{array}{ccc} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} & -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} & \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \\ -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} & \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{b} \end{array}$$

### 解答

静電ポテンシャル (電位) は, 線積分  $\phi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  で定義される。ここで,  $r_0$  は電位の基準点である。すなわち,  $\phi(r_0) = 0$  である。線積分において, 積分の道筋を無限遠点から  $\mathbf{r}$  に向かう  $x$   $y$  平面内に平行な経路とする。この場合,  $d\mathbf{r}$  は  $\mathbf{r}$  と平衡であるから,  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r \cdot dr$  である。従って, 線積分は以下のように  $r$  に関する通常の積分となる。

$$\int_{r_0}^{\mathbf{r}} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln b - \ln a)$$

正解は である。

### ポイント

- 電場と電位 (教科書 P.122, 124 参照)
- 電位の基準点

### 類題

問 13 真空中で直交座標の点  $(0,0,2)$  に電気量  $q$ [C] の電荷がおかれている。点  $(-1,0,0)$  における電界の  $z$  成分は  $E_z$ [N/C] はいくらか。ただし, 真空の誘電率は  $\epsilon_0$ [F/m], 座標の数値の単位はメートル[m] である。

$$\begin{array}{ccc} \frac{q}{10\sqrt{5}\pi\epsilon_0} & \frac{q}{20\pi\epsilon_0} & \frac{q}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0} \\ -\frac{q}{10\sqrt{5}\pi\epsilon_0} & -\frac{q}{20\pi\epsilon_0} & -\frac{q}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0} \end{array}$$

問 14 静電界  $E$ [N/C] , 静磁界  $B$ [T] が存在する真空中を速度  $v$ [m/s] で運動する電気量  $q$  の点電荷が存在する。この点電荷に作用するローレンツ力  $F$ [N] はどのように表されるか。

$$\begin{array}{lll}
 F = qv \times (B + E) & F = q(B + E) \times v & F = q(E + v \times B) \\
 F = q(E + B \times v) & F = q(B + v \times E) & F = q(B + E \times v)
 \end{array}$$

### 解答

ローレンツ力は、静電場（静電界）中で電荷に作用する静電力  $qE$  と、静磁場（静磁界）中で運動する電荷に作用する静磁力  $qv \times B$  の合力である。正解は である。

### ポイント

- ローレンツ力（教科書 P.139 参照）, 左手の法則
- 電流の磁気作用, 電流の相互作用
- ビオ・サバールの法則

### 類題

問 14 真空中のある場所を電流密度  $i$  [A/m<sup>2</sup>] の定常な電流が流れている。この場所における磁束密度を  $B$ [T] とすると,  $i$  と  $B$  との間にはどのような関係があるか。ただし, 真空の透磁率は  $\mu_0$  [H/m] とする。

$$\begin{array}{lll}
 \operatorname{div} B = \mu_0 i & \operatorname{div} B = \frac{1}{\mu_0} i & \operatorname{rot} B = \mu_0 i \\
 \operatorname{rot} B = \frac{1}{\mu_0} i & \operatorname{grad} B = \mu_0 i & \operatorname{grad} B = \frac{1}{\mu_0} i
 \end{array}$$

問 15 真空中に面積  $S[\text{m}^2]$  , 間隔  $d[\text{m}]$  , 電気容量  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} [\text{F}]$  の平行平板コンデンサーがおかれている。この平板間の電界強度が  $E(t) = E_0 \sin(\omega t) [\text{N/C}]$  のように時間的に変動するとき , 平板間を流れる変位電流  $I(t) [\text{A}]$  はどのようなになるか。

$$I(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d} E_0 \sin(\omega t) \qquad I(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d} E_0 \cos(\omega t) \qquad I(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d} E_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d} E_0 \omega \cos(\omega t) \qquad I(t) = \epsilon_0 S E_0 \omega \sin(\omega t) \qquad I(t) = \epsilon_0 S E_0 \omega \cos(\omega t)$$

**解答**

コンデンサーの電極の電荷は ,  $Q = CV$  で与えられる。ここで ,  $V$  は電極間の電圧で ,  $V = Ed$  である。従って ,  $Q = CE d = \frac{\epsilon_0 S}{d} \cdot d \cdot E_0 \sin(\omega t)$  である。

変位電流は , これを微分して ,  $I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 S \omega E_0 \cos(\omega t)$  となり , 正解は である。

**別解**

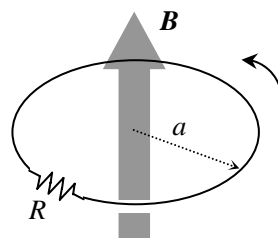
静電場に関するガウスの法則より ,  $\int_{\Omega} E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$  が成立する。左辺の面積分を , 1 つは電極内部 , 他の 1 つは電極間に位置し電極に平行な面積  $S$  の平面を表面とする直方体の面上で行えば , その値は ,  $ES$  となるから ,  $Q = \epsilon_0 S E = \epsilon_0 S E_0 \sin(\omega t)$  である。これを微分すれば , 解が得られる。

**ポイント**

- 静電場に関するガウスの法則 (教科書 P.147 参照)
- 変位電流 , 平行平面板コンデンサー (教科書 P.154 参照)

**類題**

問 15 下図のように , 真空中に置かれた半径  $a[\text{m}]$  の円周状の導線に  $R[\Omega]$  の抵抗が接続されている。この円周状の回路を垂直に貫く磁束密度  $B(t) [\text{T}] = B_0 \sin(\omega t) [\text{T}]$  の一様な磁界があるとき , 回路を流れる電流を求めよ。ただし , 電流の向きは図の ↺ の向きを正とする。また ,  $\omega [1/\text{s}]$  は定数 ,  $t [\text{s}]$  は時間 , また真空の透磁率は  $\mu_0 [\text{H/m}]$  である。



$$\frac{2\pi a}{R} B_0 \sin(\omega t) \qquad -\frac{2\pi a}{R} B_0 \omega \cos(\omega t) \qquad \frac{\pi a^2}{R} B_0 \sin(\omega t)$$

$$-\frac{\pi a^2}{R} B_0 \omega \cos(\omega t) \qquad \frac{4\pi a^2}{R} B_0 \sin(\omega t) \qquad -\frac{4\pi a^2}{R} B_0 \omega \cos(\omega t)$$

問 16 真空中のマックスウェル方程式(微分形)の正しい表現はどれか。ただし、 $E$ [N/C]は電界、 $B$ [T]は磁束密度、 $\epsilon_0$ [F/m]は真空の誘電率、 $\mu_0$ [H/m]は透磁率、 $\rho$ [C/m<sup>3</sup>]は電荷密度、 $i$ [A/m<sup>2</sup>]は電流密度を表す。

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{i}$$

### 解答

真空の空間中に電荷分布(電荷密度 $\rho$ )と電流分布(電流密度 $i$ )があるとき、電場と磁場が生じる。電場は電場ベクトル、磁場は磁束密度ベクトルで表される。電場と磁場は以下の性質を持っている。

- (1) 電場の湧き出しは、電荷密度に比例する。比例定数は $1/\epsilon_0$ 。
- (2) 磁場の湧き出しはない。
- (3) 磁束密度が時間的に変化すると、その変化を妨げる方向に電流を起こさせようとする起電力が生じる。すなわち、電場の渦が生じる。
- (4) 電流密度があると、その回りに磁場の渦を生じる。磁場の渦は、電場が時間的に変化することによっても(変位電流によっても)生じる。

マックスウェルの方程式は、以上の内容を数式的に表している。正解は である。

### 類題

問 16 真空中のマックスウェル方程式(積分形)のうち、ガウスの法則に対応するものはつぎのうちどれか。ただし $\rho$ [C/m<sup>3</sup>]は電荷密度、 $\epsilon_0$ [F/m]は真空の誘電率、 $E$ [V/m]は電界を表す。また、 $\int$ 記号における下端の添え字 $V$ は注目する領域内部の体積分、添え字 $S$ は領域表面の面積分、添え字 $C$ は領域の周を経路とする線積分を表す。

$$\int_C \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho dV \quad \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho dV \quad \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon_0 \int_V \rho dV$$

$$\int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \int_V \rho dV$$



問 17 真空中を  $z$  軸方向に伝搬する電界成分  $E_x[\text{N/C}] = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi \nu t\right)[\text{N/C}]$  , 磁界成分

$B_y[\text{T}] = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi \nu t\right)[\text{T}]$  の電磁波が存在する。ここで  $\lambda[\text{m}]$  は波長,  $\nu[1/\text{s}]$  は周波数,  $t[\text{s}]$  は時間,  $E_0[\text{N/C}]$  および  $B_0[\text{T}]$  は定数である。磁界に対する波動方程式はどのように表せるか。ただし, 真空の誘電率は  $\epsilon_0[\text{F/m}]$  , 透磁率は  $\mu_0[\text{H/m}]$  とする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

### 解答

題意の電磁波は, 磁束密度ベクトルが  $y$  軸方向を向き,  $z$  軸の正の方向に進む正弦波を表している。真空中の電磁波の速度は  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  である。 $z$  軸の正の方向に速度  $c$  で進む波の従う波動方程式は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ である。正解は } \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \text{ である。}$$

### ポイント

- 波動方程式 (教科書 P.61, 168 参照)

### 類題

問 17 真空中を  $z$  軸方向に伝搬する電場成分  $E_x[\text{N/C}] = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi \nu t\right)[\text{N/C}]$  , 磁場成分

$B_y[\text{T}] = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi \nu t\right)[\text{T}]$  の電磁波が存在する。ここで  $\lambda[\text{m}]$  は波長,  $\nu[1/\text{s}]$  は周波数,  $t[\text{s}]$  は時間,  $E_0[\text{N/C}]$  及び  $B_0[\text{T}]$  は定数である。電場に対する波動方程式はどのように表せるか。ただし, 真空の誘電率は  $\epsilon_0[\text{F/m}]$  , 透磁率は  $\mu_0[\text{H/m}]$  とする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} & \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} & \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \end{aligned}$$

問 18 観測者に対して相対速度  $v$  [m/s] で等速直線運動している系の時間の進み方は、観測者自身の持つ時計の進み方と異なる。観測者の時計が 1 秒進む間に相対速度  $v$  で等速直線運動している系の時計は何秒進むように見えるか。光速を  $c$  [m/s] とし、 $\beta = v/c$  とする。

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \sqrt{1-\beta} \quad \sqrt{1-\beta^2} \quad 1-\beta \quad 1-\beta^2$$

### 解答

相対性理論では、(1) すべての慣性系は物理的に同等であること（すべての慣性系において、そこで起こる物理現象は、数学的に同じ形で記述できること）、(2) 光速は絶対であること（すべての慣性系において、光速は一定であること）を要求する。これらの要求を満たそうとすると、絶対時間の考え方（すべての慣性系に対して、時間は普遍的に一樣に流れていると考えること：すべての慣性系に対して、時計を含むすべての物理現象の進み方が同等であること）を破棄しなければならない。慣性系 A に対して、速度  $v$  で運動している慣性系 B では、慣性系 A の時計（物理現象の進み方：時間）よりも慣性系 B の時計の方が  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  倍だけゆっくり進む。これは以下のように、ローレンツ変換から示すことがで

きる。慣性系 B の同一位置で引き続いて起きる事象を  $(x', y', z', t_1')$  及び  $(x', y', z', t_2')$  とする。これを慣性系 A で観測すると、それぞれ、 $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  及び  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  である。慣性系 B は慣性系 A に対して、 $x$  軸の正の方向に速度  $v$  で運動しているものとする、慣性系 A は慣性系 B に対して、速度  $-v$  で運動している。慣性系 B に事象から慣性系 A の事象へのローレンツ変換を考慮すれば、 $t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 、

$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}$  である。従って、 $t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$  を得る。正解は  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  である。

### ポイント

- ローレンツ変換
- 時間の伸び (time dilatation, 時計の遅れ), ローレンツ短縮, 同時刻の相対性

### 類題

問 18 質量  $m$  の物体が速度  $v$  で運動している。相対性理論を考慮した時の物体の全エネルギーを  $E$  とすると、 $E$  はどのように表現されるか。ただし、 $c$  は光速、 $\beta = v/c$  である。

$$E = \frac{mc}{\sqrt{1+\beta}} \quad E = \frac{mc}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad E = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta}} \quad E = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

問 19 静止している電子に波長  $\lambda$  [m] の X 線を照射したところ電子は速度  $v$  [m/s] で運動し、散乱された X 線の波長は  $\lambda'$  [m] となった。電子の質量を  $m$  [kg] , プランク定数を  $h$  [Js] , 光速を  $c$  [m/s] とするときこれらの間に成り立つ関係を求めよ。

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + mv$$

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} + mv$$

$$hc\lambda' = hc\lambda + mv$$

$$hc\lambda = hc\lambda' + mv$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} + \frac{1}{2}mv^2$$

### 解答

光子（フォトン）のエネルギーは、 $E = h\nu = hc/\lambda$  である。衝突前の X 線の光子のエネルギーは、衝突後の X 線の光子のエネルギーと電子の運動エネルギーに等しい（エネルギー保存則）。正解は である。

### ポイント

- 光子の運動量，光子のエネルギー（教科書 P.178，179 参照）
- 光電効果，コンプトン散乱（教科書 P.177，179 参照）

### 類題

問 19 金属に光を照射したところ光電効果によって電子が飛び出す現象が観測された。以下の記述で正しいものを選び。

照射光の波長を長くしたところ，飛び出す電子の数が増加した。

照射光の波長を短くしたところ，飛び出す電子の数が増加した。

照射光の波長を長くしたところ，飛び出す電子のエネルギーが増加した。

照射光の波長を短くしたところ，飛び出す電子のエネルギーが増加した。

照射光の強度を強くしたところ，飛び出す電子のエネルギーが増加した。

照射光の強度を弱くしたところ，飛び出す電子のエネルギーが増加した。

問 20 静止していた電子を  $V[V]$  の電圧で加速させ、電子線を生成した。電子の質量を  $m$  [kg] , プランク定数を  $h$  [Js] , 電荷の素量を  $e$  [C] とするときこの電子線の波長  $\lambda$  [m] を求めよ。

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{meV}} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \quad \lambda = \frac{h}{meV}$$

$$\lambda = \frac{h}{2meV} \quad \lambda = \frac{he}{mV} \quad \lambda = \frac{he}{2mV}$$

### 解答

物質波の波長は、 $\lambda = \frac{h}{p}$  で与えられる。ここで  $p$  は、粒子の運動量である。静止していた電子を電圧  $V$

で加速させると、その運動エネルギーは、 $E = \frac{1}{2}mv^2 = eV$  であるから、その運動量は、

$$p = mv = m\sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{2meV} \text{ である。正解は } \frac{h}{\sqrt{2meV}} \text{ である。}$$

### ポイント

- 物質波の波長 (教科書 P.182 参照)
- 電子線回折 (教科書 P.183 参照)
- 不確定性原理 (教科書 P.184 参照)

### 類題

問 20 不確定性関係(不確定性原理)を示す正しい式を選べ。ただし、プランク定数を  $h$  , 時間, 位置, 速度, 運動量及びエネルギーの不確定度(平均値からのずれの程度)をそれぞれ,  $\Delta t$  ,  $\Delta x$  ,  $\Delta v$  ,  $\Delta p$  ,  $\Delta E$  とする。

$$\Delta x \Delta E \sim h \quad \Delta x \Delta t \sim h \quad \Delta x \Delta p \sim h$$

$$\Delta p \Delta E \sim h \quad \Delta v \Delta t \sim h \quad \Delta v \Delta E \sim h$$